ЛОКАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Ф. Т. ШАМШИЕВ

Кафедра астрономии и астрофизики Национального университета Узбекистана им. Мирзо-Улугбека
E-mail: shamshiyev_f@nuu.uz

Аннотация

Исследуется локальный интеграл позволяющий сразу определять поле скоростей для некоторых конкретных начальных условий. Т.е. речь идет об отдельной изолированной инвариантной поверхности в фазовом пространстве [1], задаваемой в квадратичной относительно компонентов скорости. Перечислены все двумерные потенциалы, допускающих такой локальный интеграл для вращающихся систем.

Ключевые слова: звездная динамика, уравнение движения, локальный квадратичный интеграл.

Введение

Интеграл движения, квадратичный по скоростям и независимый от интеграла энергии, достаточно хорошо известны в механике при движении частицы в стационарном потенциальном поле [2,3]. В приложении к звездной динамике такой интеграл наиболее обстоятельно был изучен Г.Г.Кузминым [4]. При наличии вращения с постоянной угловой скорости Ω≠0 поиск такого дополнительного квадратичного интеграла был предпринят Вандервортом [5], но при заранее поставленном условии симметрии потенциала

$$U(x,y)=U(-x,-y)$$

и условии четности самого интеграла движения (не упомянуто, что он может быть, в принципе и не четным относительно той же инверсии). Кроме некоторых тривиальных ситуаций, в [5] получается однозначная форма потенциала, удовлетворяющая поставленным требованиям. Именно, потенциал $U(x,y)$ (включая центробежных сил) должен быть обратно пропорционален произведению расстояний от двух фиксированных точек.

В предлагаемой работе мы, также не накладывая ограничений типа симметрии, решаем более общую задачу перечисления всех двумерных потенциалов при наличии вращения, допускающих локальный квадратичный интеграл в смысле, употреблявшемся В.А.Антоновым в [1], в отличие от [6].

1. Постановка задачи

Локальный интеграл при движении в поле с потенциалом U и угловой скоростью вращения Ω, согласно вышесказанному, ищем в виде

$$Au^2+Buv+Cv^2+Du+Ev+F=0, \qquad (1)$$

где A,B,C,D,E и F– некоторые функции координат x,y. По смыслу локального интеграла, если начальные условия удовлетворяют (1), то это равенство должно быть справедливо для всех t, каково бы ни было величина интеграла Якоби

$$\frac{u^2+v^2}{2}-\frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{2}-U=h. \qquad (2)$$

Для определения коэффициентов $A,B,\dots,F$ как функций координат мы заметим, что применение оператора дифференцирования вдоль траектории

$$L=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\left(-\frac{\partial U}{\partial x}+2\Omega v\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(-\frac{\partial U}{\partial y}-2\Omega u\right)\frac{\partial}{\partial v} \qquad (3)$$

к левой части (1), обозначаемой далее через J, должно давать нуль, если $J=0$. Поскольку по своей природе L{J} – многочлен относительно u и v третьей степени, ясно, что он должен делиться на J:

$$L\{J\}=(au+bv+c)J, \qquad (4)$$

тождественно, с некоторыми функциями координат a, b, c. Совокупность членов второй степени в J обозначим как J_1. Очевидно она должна разлагаться на линейные множители:

$$J_1=(u\sin\tau-v\cos\tau)(u\sin\sigma-v\cos\sigma) \qquad (5)$$

с точностью до некоторого общего для J множителя, не играющего вообще роли для локального интеграла.

Тогда

$$A=\sin\tau\,\sin\sigma,\qquad B=-\frac{\sin(\sigma+\tau)}{2},\qquad C=\cos\tau\,\cos\sigma.$$

Сравнение членов третьей степени в (4) дает

$$u\frac{\partial J_1}{\partial x}+v\frac{\partial J_1}{\partial y}=(au+bv)J_1.$$

Коэффициенты a и b в (6) теперь получается простым делением:

$$a=-\frac{\partial\tau}{\partial y}-\frac{\partial\sigma}{\partial y},\qquad b=\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial x},$$

с определяется

$$2\left[\frac{\partial D}{\partial x}u^2+\left(\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial x}\right)uv+\frac{\partial E}{\partial y}v^2\right]+2\Omega\left(v\frac{\partial J_1}{\partial u}-u\frac{\partial J_1}{\partial v}\right)=$$
$$cJ_1+2(au+bv)(Du+Ev). \qquad (7)$$

При конкретных $u=\cos\sigma, v=\sin\sigma$ или $u=\cos\tau, v=\sin\tau$

$D=-R\sin\tau-R_1\sin\sigma,\qquad E=R\cos\tau+R_1\cos\sigma.$

Выписывая в (4) все члены нулевой и первой степени, получаем систему уравнений для F и U:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-4\Omega E-2A\frac{\partial U}{\partial x}-2B\frac{\partial U}{\partial y}=2cD+aF,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}+4\Omega D-2B\frac{\partial U}{\partial x}-2C\frac{\partial U}{\partial y}=2cE+bF, \qquad (8)$$
$$-2D\frac{\partial U}{\partial x}-2E\frac{\partial U}{\partial y}=cF.$$

3. Построения потенциала

Для удобства выберем систему координат так, чтобы в начале координат касательная к огибающей была параллельна оси ординат. Тогда в этой точке $\sigma=\pi/2$. Подставляем в (8) асимптотические разложения

$$F=F_0(y)\left(x\cos\sigma+y\sin\sigma-f''(\sigma)\right)+\cdots$$
$$U=U_0(y)+U_1(y)\left(x\cos\sigma+y\sin\sigma-f''(\sigma)\right)+\cdots$$

Подстановка в первое и третье уравнения (8) после естественных сокращений дает $F_0-2U_1\sin\sigma=0$, $F_0+U_1\sin\tau=0$, откуда следует $F_0=0$, $U_0=0$. Но тогда $\xi=0$ на всей плоскости и опять F=4RR_1, что дает локальный интеграл.

Построены потенциалы также для случаев, когда $\sigma=\tau$ или когда одновременно σ и τ носят специальный характер, а также $\sigma=\theta$, $\tau=-\theta$ ($\theta=$

3. Заключение

Итак, результаты исследования квадратичного локального интеграла дает фактического обобщения, в сравнении с потенциалом Вандерворта [5]. В этом смысле задача о квадратичном интеграле похожа на аналогичную задачу для локальных интегралов первой степени с $\Omega\neq 0$ [7,8], где локальные интегралы совместимы с более широким кругом потенциалов, чем истинные. В отсутствии вращения и квадратичные локальные интегралы дают обобщение в сравнении с истинными [1].

Работа выполнена при поддержке гранта ФЗ-20200929344

Литература

1. Антонов В.А., Вестник ЛГУ, 1981, №19, с.97
2. Jacobi's Lectures on Dynamics Second Revised Edition, Hindustan Book Agency (India), 2009
3. Уиттекер Э. Аналитическая динамика, М., 378 с., 1937
4. Кузмин Г.Г. Астроном. журнал, т.33, №1, с.35-48, 1956
5. Vandervoort, P.O.,1979, The Astrophysical Journal, 232, 91-105
6. Lynden-Bell, D.: 2016, MNRAS 458, 726–732
7. Antonov, V.A., Shamshiev F.T., 1993, Cel. Mech. and Stellar Dyn., 56, 451-469.
8. Antonov, V.A., Shamshiev F.T., 1994, Cel. Mech. and Stellar Dyn., 59, 209-219