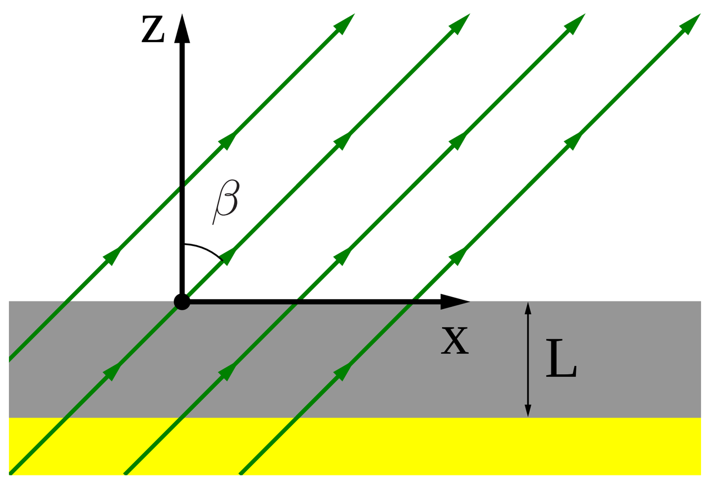
Течение в окрестности полярной шапки нейтронной звезды

Халяпин А.В.[1], Барсуков Д.П.[2]

1 - НИУ ВШЭ 2 - ФТИ им. А.Ф. Иоффе

Рассматривается течение, возникающее в жидком слое на поверхности нейтронной звезды, под действием электрического тока, текущего сквозь магнитосферу в случае однородного магнитного поля, наклоненного к поверхности.



Схематичное изображение жидкого слоя на поверхности звезды. Жидкий слой показан серым цветом, твердая кора желтым цветом, силовые линии магнитного поля обозначены зелеными стрелками.

1. плоско-паралельный слой жидкости $-L < z < 0$
   пренебрегаем кривизной поверхности
2. стационарность
   все величины не зависят от времени t
3. однородное магнитное поле в слое $\vec{B}_{(0)} = B_{(0)}\, (\cos\beta\, \vec{e}_z + \sin\beta\, \vec{e}_x)$
4. изотропная вязкость жидкости
5. изотропная проводимость жидкости
6. бесконечная проводимость коры
7. уравнение состояния $p = p(\rho)$
   нет "химических" реакций

Уравнения

$$\rho\, \left(2\, \left[\vec{\Omega} \times \vec{v}\right] + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \frac{1}{c}\, \left[\vec{j} \times \vec{B}\right] + \vec{\mathcal{F}}_{vis} + \rho\, \vec{g}$$

$$-\nabla\, \Phi + \frac{1}{c}\, \left[\vec{v} \times \vec{B}\right] = R\, \vec{j} \quad \text{и} \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\, \vec{j} \quad \text{и} \quad \mathrm{div}\, (\rho\, \vec{v}) = 0$$

где $\vec{v}$ – скорость течения жидкости, в системе отсчета, вращающейся вместе со звездой, ρ и p – плотность и давление жидкости, $\vec{B}$ – индукция магнитного поля, $\vec{j}$ – плотность электрического тока, Φ – электростатический потенциал, R – электрическое сопротивление жидкости, $p = p(\rho)$, $\vec{\mathcal{F}}_{vis}$ – сила вязкости, $\vec{g} = -g\, \vec{e}_z$ – напряженность гравитационного поля, $g = const(\vec{x})$, $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения звезды, $\Omega = 2\pi/P$, P – период вращения звезды.

Нулевое приближение

нулевое приближение $\quad \vec{v}_{(0)} = 0 \quad$ и $\quad \vec{j}_{(0)} = 0$
уравнения в 0-м приближении

$$\nabla p_{(0)} = \rho_{(0)} \cdot g\, \vec{e}_z \quad \text{и} \quad \mathrm{div}\vec{B}_{(0)} = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{rot}\vec{B}_{(0)} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla\, \Phi_{(0)} = const(\vec{x})$$

где $p_{(0)} = p(\rho_{(0)})$

Предположение: однородное магнитное поле

$$\vec{B}_{(0)} = B_{(0)}\, (\cos\beta\, \vec{e}_z + \sin\beta\, \vec{e}_x) \qquad \text{где} \quad B_{(0)} = const(\vec{x}) \quad \text{и} \quad \beta = const(\vec{x})$$

Предположение $\quad p_{(0)} = p_{(0)}(z) \quad$ и $\quad \rho_{(0)} = \rho_{(0)}(z) \quad$ и $\quad R_{(0)} = R_{(0)}(z)$
положим $\quad \Phi_{(0)} = 0$

Линейное приближение

величины 1-го порядка $\quad \vec{v} \quad$ и $\quad \vec{j} \quad$ и $\quad \delta p \quad$ и $\quad \delta\rho \quad$ и $\quad \Phi \quad$ и $\quad \vec{\mathcal{F}}_{vis}$
где введены обозначения $\quad p = p_{(0)} + \delta p \quad$ и $\quad \rho = \rho_{(0)} + \delta\rho$
уравнения в линейном приближении

$$2\, \rho_{(0)} \cdot \left[\vec{\Omega} \times \vec{v}\right] = \frac{B_{(0)}}{c} \cdot \left[\vec{j} \times \vec{e}_B\right] + \vec{\mathcal{F}}_{vis} - \nabla\delta p - \delta\rho \cdot g\, \vec{e}_z$$

$$-\nabla\, \Phi + \frac{B_{(0)}}{c} \cdot [\vec{v} \times \vec{e}_B] = R_{(0)}\, \vec{j} \quad \text{и} \quad \mathrm{div}\vec{j} = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{div}\, \left(\rho_{(0)}\, \vec{v}\right) = 0$$

где $\delta p = c_s^2\, \delta\rho$ и $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_{(0)})$ и $\vec{e}_B = \vec{B}_{(0)}/B_{(0)}$.

Граничные условия

верхняя граница $z = 0$ – граница жидкость-"вакуум"

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial v_y}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad \text{и} \quad v_z|_{z=0} = 0$$

задана величина $\quad j_z|_{z=0}$
нижняя граница $z = -L$ – граница жидкость-твердое тело
предположение – бесконечная проводимость коры

$$\vec{v}|_{z=-L} = 0 \quad \text{и} \quad \Phi|_{z=-L} = 0$$

Оценки

$L \sim 10^2\,\mathrm{m}$ и $\rho \sim 10^6\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$	[6]
$\eta_{(0)} \sim 10^4\,\mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-1}}$	коэффициент сдвиговой вязкости [7, 8]
$R_{(0)} \sim 10^{-19}$ CGS	сопротивление [9]

тогда мы получим

$E = \frac{\eta_{(0)}}{\Omega L^2 \rho_{(0)}} \sim 10^{-11}$	число Экмана
$\mathrm{Ha} = \frac{B_{(0)} L}{c\sqrt{\eta_{(0)} R_{(0)}}} \sim 10^{11}$	число Хартмана
$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{(0)}\, v\, L}{\eta_{(0)}} \sim 10^{-2} - 10^{-4}$	число Рейнольдса

Решение вне пограничных слоев

Вне преграничных слоев пренебрегая поправками порядка
$\frac{1}{\mathrm{Ha}\cdot\cos(\beta)} \sim 10^{-11}$ и $\frac{1}{\mathrm{E\,Ha}^2} \sim 10^{-11}$
решение можно записать в виде

$$v_x = -\frac{1}{\cos^2\beta} \cdot \frac{c^2}{B_{(0)}^2} \cdot \left(R_f\, \frac{\partial\delta\hat{p}_0}{\partial\tilde{x}} + \mathrm{tg}\beta\, \tilde{R}_f\, \frac{\partial^2\delta\hat{p}_0}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\cos^2\beta} \cdot \frac{c}{B_{(0)}} \cdot \frac{\partial\hat{j}_B}{\partial y} \cdot \left(\tilde{R}_{(0)} + \frac{\sin^2\beta}{\rho_{(0)}(z)}\, \tilde{K}(z)\right)$$

$$v_y = \frac{1}{\cos^2\beta} \cdot \frac{c^2}{B_{(0)}^2} \cdot \left(-R_f\, \frac{\partial\delta\hat{p}_0}{\partial y} + \mathrm{tg}\beta\, \tilde{R}_f\, \frac{\partial^2\delta\hat{p}_0}{\partial\tilde{x}\, \partial y}\right) + \frac{c}{B_{(0)}} \cdot \left(\mathrm{tg}\beta\, R_{(0)}\, \hat{j}_B - \frac{\tilde{R}_{(0)}}{\cos^2\beta}\, \frac{\partial\hat{j}_B}{\partial\tilde{x}}\right)$$

$$v_z = \mathrm{tg}\beta \cdot \frac{c}{B_{(0)}} \cdot \frac{1}{\rho_{(0)}(z)} \cdot \frac{\partial\hat{j}_B}{\partial y} \cdot \tilde{K}(z)$$

где введены обозначения

$$\tilde{R}_{(0)}(z) = \int_{-L}^{z} R_{(0)}(z')\, dz' \quad \text{и} \quad R_f(z) = R_{(0)}(z) \cdot f(z) \quad \text{и} \quad \tilde{R}_f(z) = \int_{-L}^{z} R_f(z')\, dz'$$

$$\tilde{K}(z) = \int_{-L}^{z} \rho_{(0)}(z')\, R_{(0)}(z') \cdot (f(z')\, K_0 - 1)\, dz'$$

$$K_0 = \int_{-L}^{0} \rho_{(0)}(z')\, R_{(0)}(z')\, dz' \Big/ \int_{-L}^{0} \rho_{(0)}(z')\, R_{(0)}(z')\, f(z')\, dz'$$

Функция $f(z)$ определена как $f(z) = \exp\left(\int_z^0 g\, /\, c_s^2(z')\, dz'\right)$.
Величины $\delta\hat{p}_0$ и $\hat{j}_B$ зависят только от $\tilde{x} = x - \mathrm{tg}\beta\, z$ и y.

$$\delta\hat{p}_0(\tilde{x}, y) = \sin\beta \cdot \frac{B_{(0)}}{c} \cdot \frac{K_0}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left((\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (y - y')^2\right) \cdot \frac{\partial\hat{j}_B}{\partial y}(\tilde{x}', y')\, d\tilde{x}'\, dy'$$

$$\delta p = \delta\hat{p}_0(\tilde{x}, y) \cdot f(z) \quad \text{и} \quad \delta\rho = \frac{\delta p}{c_s^2(z)} \quad \text{и} \quad \hat{j}_B(x, y) = \frac{j_z(x, y, 0)}{\cos\beta}$$

Величина $\hat{j}_B(\tilde{x}, y)$ равна плотности тока, текущего в магнитосфере вдоль магнитных силовых линий.

Скорости v_x и v_y на поверхности слоя с точностью до поправок $\frac{1}{\mathrm{Ha}\cdot\cos(\beta)}$ и $\frac{1}{\mathrm{E\,Ha}^2}$ совпадают с $v_x|_{z=0}$ и $v_y|_{z=0}$ соответственно

Результаты

1. скорость течения черезвычайно мала
   $v \sim 10^{-10} - 10^{-8}$ cm s^{-1}
   также как в случае вертикального магнитного поля $\beta = 0$ [4]
2. в жидкости ток практически не замыкается
   почти весь тормозящий момент приложен к коре
   это согласуется с результатами работы [2] и подтверждает выводы работы [1] о торможении пульсара J0901-4046 токовыми потерями за счет токов текущих через вакуумный зазор в том числе и в случае наличия мелкомасштабного магнитного поля на поверхности нейтронной звезды.

Проблемы

1. простое уравнение состояния $p = p(\rho)$
   нет учета "химических" реакций
   нет учета градиента температуры
2. изотропная проводимость и вязкость жидкости
3. бесконечная проводимость коры
4. стабильность течения
   возможно может возникать неустойчивость подобная рассмотренной в [10]
5. при $\cos\beta \lesssim 0.1$ возможно $\mathrm{Re} > 1$
6. не учтены центробежная сила и неоднородность гравитационного поля

Авторы благодарят А.И. Цыгана и М.В. Воронцова за поддержку, комментарии и полезные обсуждения, Д.Н. Собьянина, Е.А. Михайлова, А.В. Бирюкова, А.И. Чугунова, А.Ю. Потехина, И.Ф. Малова и В.А. Урпина за комментарии и полезные обсуждения

Литература

[1] D.N. Sob'yanin, Phys. Rev. D., **107**, L081301 (2023).
[2] D.N. Sob'yanin, Phys. Rev. D., **109**, L061302 (2024).
[3] Е.А. Михайлов, А.Ю. Чудновский, Сибирский журнал индустриальной математики, **23** (4), 88 (2020).
[4] А.И. Цыган, Д.А. Шалыбков, Д.П. Барсуков, О.А. Гогличидзе, Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки, **194** (2), 120 (2014).
[5] M.V. Vorontsov, D.P. Barsukov, J. Phys. Conf. Ser., **1400**, 022022 (2019).
[6] P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev *Neutron stars I. Equation of State and Structure* (Springer, N.Y., 2007), p. 13.
[7] А.И. Чугунов, Д.Г. Яковлев, АЖ, **82** (9), 814 (2005).
[8] D.D. Ofengeim, D.G. Yakovlev, Europhysics Letters, **112** (5), id. 59001 (2015).
[9] A.Y. Potekhin, A & A, **351**, 787 (2015).
[10] E.A. Kuznetsov, E.A. Mikhailov, eprint arXiv:2402.16989 (2024).